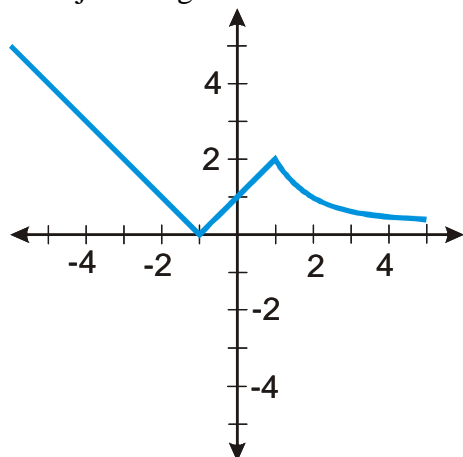


2.4.13 Kreslení graf obecné funkce II

Předpoklady: 2402, 2403, 2412

Stejně jako v minulé hodině budeme kreslit grafy funkcí odvozených od funkce $y = f(x)$, která je dána grafem na obrázku:



Př. 1: Nakresli graf funkce $y = f(x-1)$.

Funkce $y = f(x-1)$ se od funkce $y = f(x)$ liší takto:

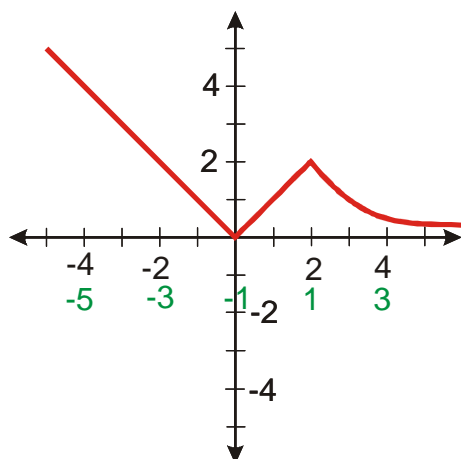
- funkce $y = f(x)$: pokud například za x zvolíme číslo 0, do funkce $y = f(\quad)$ dosazujeme číslo 0 (a funkce z něj vyrobí hodnotu 1),
- funkce $y = f(x-1)$: pokud například za x zvolíme číslo 0, funkce $y = f(\quad)$ nevyrábí hodnotu z čísla 0, protože ještě před dosazením do funkce odečítáme od zvoleného x jedničku \Rightarrow do funkce dosazujeme číslo $x-1 = 0-1 = -1$ (a funkce z něj vyrobí hodnotu 0)

\Rightarrow funkce tedy nekreslí graf podle čísel, která popisují čísla na ose x , ale podle čísel zmenšených o jedna \Rightarrow změněná čísla (zmenšená o 1) si napíšeme pod původní očíslování osy a obrázek kreslíme podle nich (protože tato změněná čísla se dosazují do funkce a z nich funkce vyrábí hodnoty, o číslech, která byla na ose x původně, funkce nic neví, protože je před dosazením změnil výpočet v závorce).

Zvolíme x

Vypočteme $x-1$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1)$



Na rozdíl od minulé hodiny si do grafu nekreslíme obrázek původní funkce $y = f(x)$. Tento obrázek v grafu k ničemu nepotřebujeme (v minulé hodině jsme právě podle jeho tvaru kreslili další fáze obrázku), stačí, když jej máme na papíře vedle, abychom se mohli podívat, jaké hodnoty kdy funkce vyrábí.

Jak si budeme výsledek předchozího příkladu pamatovat?

- „1 v závorce posouvá graf po ose x “ – to ne, popisuje to pouze jeden z mnoha případů, není jasné, proč se tak stalo
- „čísla v závorce mění hodnoty neznámé, kterou dosazujeme do funkce“ – to ano, je jasné, proč se tak děje, sice budeme muset přemýšlet, co konkrétního se děje, ale funguje to vždycky.

Pedagogická poznámka: Diskuse o tom, jak je vhodné si předchozí poznatek pamatovat je asi nejdůležitější v celé hodině. Není však třeba ji příliš prodlužovat, protože studenti, kteří zůstanou u „posouvání“ narazí u příkladu 3.

Pedagogická poznámka: Celý obsah hodiny je pro většinu studentů nenakreslitelný. Reálné a možné je dostat se s celou třídou k příkladu 7, který je důležitý pro spojení této a předcházející hodiny. Zbytek si mohou dokreslit doma nebo při cvičení.

Př. 2: Nakresli graf funkce $y = f(x+2)$.

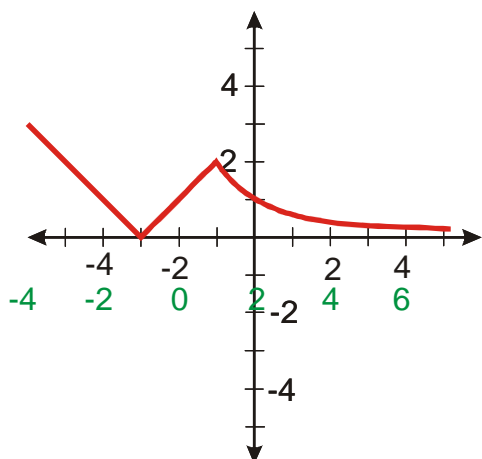
Funkce $y = f(x+2)$ se od funkce $y = f(x)$ liší výpočtem v závorce před dosazením do funkce.

Zvolíme si $x = 1$. Ještě než dosadíme do funkce, uděláme $x+2 = 1+2 = 3$. V obrázku zjišťujeme $f(1)$ jako hodnotu pro číslo 3. Kreslíme normální obrázek ze změněných čísel \Rightarrow změněná čísla si napíšeme pod původní očíslování osy a kreslíme podle nich.

Zvolíme x

Vypočteme $x+2$

Nakreslíme funkci $y = f(x+2)$

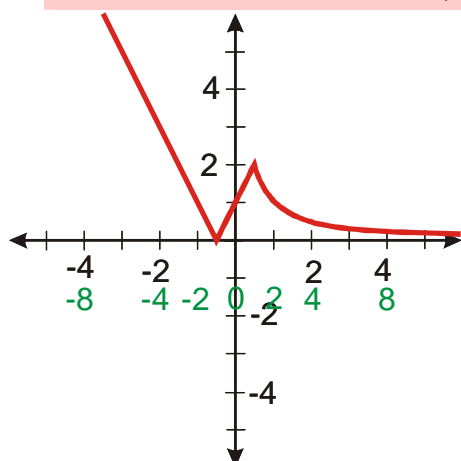


Př. 3: Nakresli graf funkce $y = f(2x)$.

Zvolíme x

Vypočteme $2x$

Nakreslíme funkci $y = f(2x)$



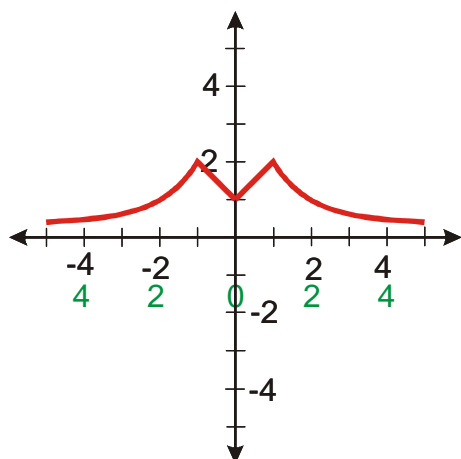
Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu ztroskotají skoro všichni, kteří místo přečíslovávání osy fakticky posunují grafy (a nepostupují tedy podle pravidla). Tito studenti buď vůbec nevědí nebo stejně jako u násobení dvěma mimo předpis funkce očekávají zvětšení grafu. Trvám na tom, aby dodržovali postup a pak příklad vyřeší.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = f(|x|)$.

Zvolíme x

Vypočteme $|x|$

Nakreslíme funkci $y = f(|x|)$



Pedagogická poznámka: S příkladem má problém mnoho studentů, často i ti, kteří se snaží postupovat správně. Většinou je příčinou neúspěchu podvědomé očekávání, že graf funkce $f(x)$ by se měl ve výsledku objevit celý. Tato (samozřejmě logicky ničím neodůvodněná, ale vzhledem k předchozím příkladům pochopitelná představa) jim brání příklad vyřešit. Při kreslení obrázku ze změněných čísel totiž postupují obráceně. Místo, aby v obrázku původní funkce hledali hodnoty pro čísla pod osou, hledají v grafu místa, kam mají překreslit všechny části původního obrázku (a pro záporná x taková místa nenajdou).

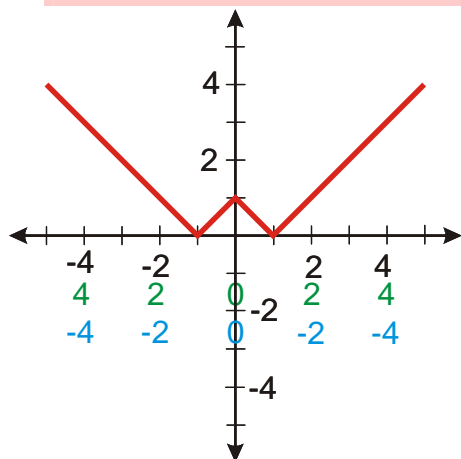
Př. 5: Nakresli graf funkce $y = f(-|x|)$.

Zvolíme x

Vypočteme $|x|$

Vypočteme $-|x|$

Nakreslíme funkci $y = f(-|x|)$



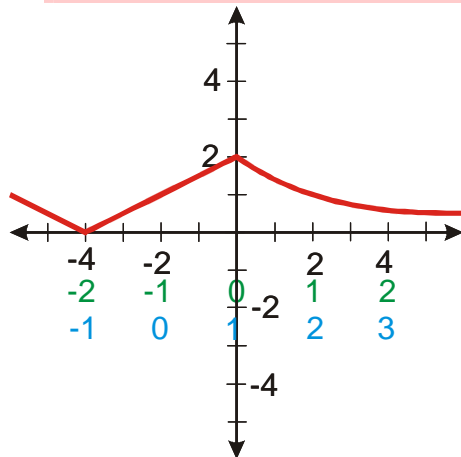
Př. 6: Nakresli graf funkce $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

Zvolíme x

Vypočteme $\frac{1}{2}x$

Vypočteme $\frac{1}{2}x+1$

Nakreslíme funkci $y = f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$



Pedagogická poznámka: Snažím se studenty přesvědčit, aby přečíslovali postupně. Pro každou operaci v postupu psali novou sadu čísel a přečíslování řady udělali najednou. Někteří mají tendenci spočítat celý vnitřní výraz najednou, pro jednotlivá čísla, je to pomalejší a vede to k většímu množství chyb. U studentů, kteří u tohoto způsobu vytrvají, je v případě chyby dobré připomenout, že příčinou je špatný způsob přečíslování osy.

Př. 7: Nakresli graf funkce $y = 2f(|x|-1)$

Jde o kombinaci dnešní a minulé hodiny. Výraz uvnitř $f(\)$ vyřešíme pomocí přečíslování osy, pak nakreslíme graf a provedeme s ním operace, které jsou vně.

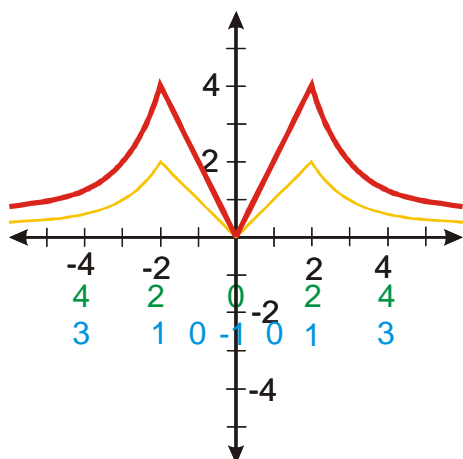
Zvolíme x

Vypočteme $|x|$

Vypočteme $|x|-1$

Nakreslíme funkci $y = f(|x|-1)$

Nakreslíme funkci $y = 2f(|x|-1)$



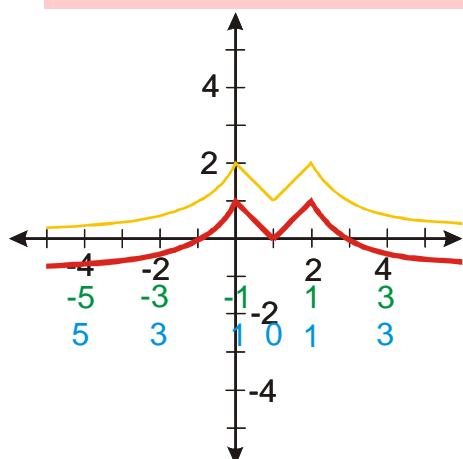
Shrnutí:

Graf libovolné variace funkce $f(x)$ nakreslíme tak, že předpis funkce rozdělíme na jednotlivé kroky. Výpočty uvnitř závorky značí funkci (v případě funkce $y = 2f(|x|-1)$ jde o výraz $|x|-1$) se týkají hodnot proměnné x před dosazením do funkce a mění hodnoty na ose x . Podle těchto upravených hodnot pak nakreslíme graf funkce $f(x)$. Výpočty vně závorky značí funkci (v případě funkce $y = 2f(|x|-1)$ jde o násobení $f(|x|-1)$ dvěma) se týkají již nakresleného grafu funkce a různě ho mění (podle typu výpočtu).

Nic víc nepotřebujeme. Pamatovat si, co s grafem provádějí jednotlivé druhy výpočtů, je zbytečné a zavádějící.

Př. 8: Nakresli graf funkce $y = f(|x-1|) - 1$

Zvolíme x
Vypočteme $x-1$
Vypočteme $ x-1 $
Nakreslíme funkci $y = f(x-1)$
Nakreslíme funkci $y = f(x-1) - 1$



Př. 9: Nakresli graf funkce $y = |f(x+1) - 2|$

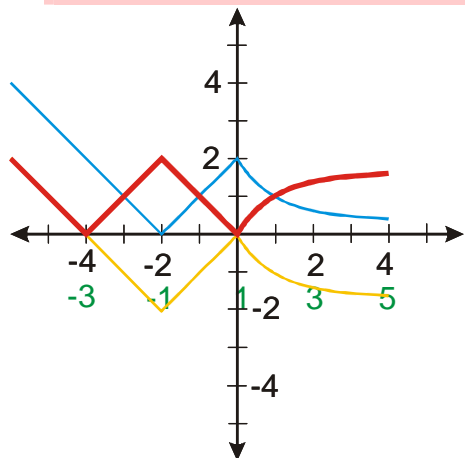
Zvolíme x

Vypočteme $x+1$

Nakreslíme funkci $y = f(x+1)$

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) - 2$

Nakreslíme funkci $y = |f(x+1) - 2|$



Př. 10: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{2} f(2x-4)$

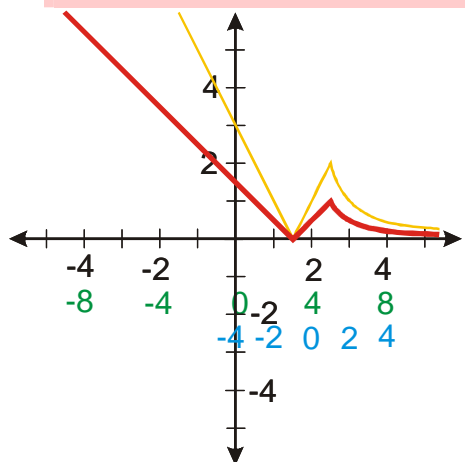
Zvolíme x

Vypočteme $2x$

Vypočteme $2x-4$

Nakreslíme funkci $y = f(2x-4)$

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(2x-4)$



Př. 11: Petáková:
strana 27/cvičení 29 b) c) g) i) j)

Shrnutí: Výpočty uvnitř předpisu funkce můžeme se projevují na změnách hodnot dosazovaných do funkce. Při kreslení grafu je můžeme zachytit přepisováním hodnot na ose x .

Dodatek: Analogicky by bylo možné vyřešit změny grafu vně předpisu tím, že bychom nakreslený graf funkce $f()$ nechali a pouze přepisovali hodnoty na ose y .